

METODE MATEMATIKA (D)

METODE FROBENIUS

METODE FROBENIUS

Metode Frobenius adalah salah satu penyelesaian Persamaan Diferensial (PD) di sekitar titik singular dan tidak dapat diselesaikan dengan pemisalan $y = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$.

Titik Singular adalah titik diskontinu atau suatu titik yang membuat penyelesaian tidak tunggal di $x = 0$.

METODE FROBENIUS

Contoh Kasus titik singular

Misal terdapat persamaan diferensial tingkat dua homogen berikut ini

$$p(x) \frac{d^2 y}{dx^2} + q(x) \frac{dy}{dx} + r(x)y = 0$$

Suatu PD dikatakan memiliki **Titik singular** di x jika $p(0) = 0$.

METODE FROBENIUS

Sehingga, apabila terdapat persamaan diferensial seperti pada bagian sebelumnya, dapat diselesaikan menggunakan **metode Frobenius**.

Caranya:

Misalkan penyelesaian dari PD tersebut adalah $y = \sum_{m=0}^{\infty} c_m x^{m+r}$

Akan diperoleh :

$$y' = \sum_{m=0}^{\infty} (m+r) c_m x^{m+r-1}$$
$$y'' = \sum_{m=0}^{\infty} (m+r-1)(m+r) c_m x^{m+r-2}$$

Ambil kasus Persamaan PD tingkat satu

$$xy' + y = 0$$

$x = 0$ merupakan titik singular dari Persamaan Diferensial tersebut, karena apabila $x = 0$ disubstitusi pada PD akan mendapatkan penyelesaian $y = 0$ atau y tak terdefinisi.

Misalkan:

$$y = \sum_{m=0}^{\infty} c_m x^m \text{ dan } y' = \sum_{m=0}^{\infty} m c_m x^{m-1}$$

PEMBAHASAN

Substitusikan pemisalan ke PD awal

$$x \sum_{m=1}^{\infty} m c_m x^{m-1} + \sum_{m=0}^{\infty} c_m x^m = 0 \quad \rightarrow \quad \sum_{m=1}^{\infty} m c_m x^m + \sum_{m=0}^{\infty} c_m x^m = 0$$

$$\sum_{m=1}^{\infty} m c_m x^m + c_0 \sum_{m=1}^{\infty} c_m x^m = 0 \quad \rightarrow \quad \sum_{m=1}^{\infty} m c_m x^m + \sum_{m=0}^{\infty} c_m x^m = 0$$

Sehingga, dapat disimpulkan bahwa ketika:

- **m = 0**

$$c_0 = 0$$

- **m = 1, 2, 3, ...**

$$(m + 1)c_m = 0$$

PEMBAHASAN

Sama halnya ketika kita coba menyelesaikan PD tersebut menggunakan metode variabel terpisah.

$$\begin{aligned}xy' + y &= 0 \\y' &= -\frac{y}{x} \\\frac{dy}{dx} &= -\frac{y}{x} \\\frac{1}{y} dy &= -\frac{1}{x} dx \\\ln y &= -\ln x + c \\\ln y &= \ln \frac{c}{x} \\y &= \frac{c}{x}\end{aligned}$$

PEMBAHASAN

Hal tersebut menunjukkan bahwa metode penyelesaian deret kuasa di sekitar $x = 0$ gagal untuk mendapatkan penyelesaiannya. Maka digunakan **Metode Frobenius** untuk menyelesaikan kasus tersebut.

PENYELESAIAN METODE FROBENIUS

Misal diketahui Persamaan Diferensial:

$$y'' + \frac{b(x)}{x} y' + \frac{c(x)}{x^2} y = 0$$

Dapat ditulis sebagai:

$$x^2 y'' + x b(x) y' + c(x) y = 0$$

PENYELESAIAN METODE FROBENIUS

Misalkan penyelesaian dari persamaan diferensial tersebut adalah:

$$y = \sum_{m=0}^{\infty} c_m x^{m+r}$$

Akibatnya, diperoleh:

$$y' = \sum_{m=0}^{\infty} (m+r) c_m x^{m+r-1}$$

$$y'' = \sum_{m=0}^{\infty} (m+r-1)(m+r) c_m x^{m+r-2}$$

Lalu, substitusikan ke Persamaan Diferensialnya!

PENYELESAIAN METODE FROBENIUS

$$x^2 y'' + x b(x) y' + c(x) y = 0$$

$$x^2 \sum_{m=0}^{\infty} (m+r-1)(m+r) c_m x^{m+r-2} + x b(x) \sum_{m=0}^{\infty} (m+r) c_m x^{m+r-1} + c(x) \sum_{m=0}^{\infty} c_m x^{m+r} = 0$$

$$\sum_{m=0}^{\infty} (m+r-1)(m+r) c_m x^{m+r} + b(x) \sum_{m=0}^{\infty} (m+r) c_m x^{m+r} + c(x) \sum_{m=0}^{\infty} c_m x^{m+r} = 0$$

$$\sum_{m=0}^{\infty} [(m+r-1)(m+r) + (m+r)b(x) + c(x)] c_m x^{m+r} = 0$$

PENYELESAIAN METODE FROBENIUS

$$\sum_{m=0}^{\infty} [(m+r-1)(m+r) + (m+r)b(x) + c(x)] c_m x^{m+r} = 0$$

Untuk $m = 0$, diperoleh **persamaan indicial**:

$$r^2 - r + rb_0 + c_0 = 0$$

$$r^2 + (b_0 - 1)r + c_0 = 0$$

Karena $r^2 + (b_0 - 1)r + c_0 = 0$ merupakan persamaan kuadrat, maka pasti persamaan tersebut memiliki dua penyelesaian r

Metode Frobenius tipe III, ketika:

Misal r_1 dan r_2 merupakan penyelesaian persamaan kuadrat dari persamaan indicialnya, maka dikatakan **metode frobenius tipe III**, ketika:

$$r_1 - r_2 = p, \text{ dengan } p \text{ merupakan bilangan bulat positif.}$$

Sehingga, untuk menyelesaikan PD yang memiliki persamaan indicial sesuai bentuk tersebut, maka selesaikan menggunakan **metode frobenius tipe III**!

Penyelesaian Metode Frobenius tipe III

1) Menentukan Solusi Pertamanya

Sama halnya dengan penyelesaian **metode frobenius tipe II**, diperoleh solusi pertamanya adalah:

$$y_1(x) = x^{r_1} \left(\sum_{m=0}^{\infty} a_m x^m \right)$$

2) Menentukan Solusi Keduanya

Dengan metode variasi parameter, misalkan $y_2(x) = U(x)y_1(x)$

Penyelesaian Metode Frobenius tipe III

2) Menentukan Solusi Keduanya

Dengan metode variasi parameter, misalkan $y_2(x) = U(x)y_1(x)$

$$y_2(x) = U(x)y_1(x)$$

$$y_2'(x) = U'(x)y_1(x) + U(x)y_1'(x)$$

$$y_2''(x) = U''(x)y_1(x) + U'(x)y_1'(x) + U'(x)y_1'(x) + U(x)y_1''(x)$$

$$y_2''(x) = U''(x)y_1(x) + 2U'(x)y_1'(x) + U(x)y_1''(x)$$

Penyelesaian Metode Frobenius tipe III

2) Menentukan Solusi Keduanya

Masukkan ke PD awal, sehingga diperoleh:

$$x^2(U''y_1 + 2U'y_1' + Uy_1'') + xb(x)[U'y_1 + Uy_1'] + c(x)Uy_1 = 0$$

$$U(x^2y_1'' + xb(x)y_1' + c(x)y_1) + x^2y_1U'' + [2x^2y_1' + xb(x)y_1]U' = 0$$

$$x^2y_1U'' + 2x^2y_1'U' + xb(x)y_1U' = 0$$

Ketika kedua ruas dibagi dengan x^2y_1

$$U'' + \left(\frac{2y_1'}{y_1} + \frac{b(x)}{x}\right)U' = 0$$

Penyelesaian Metode Frobenius tipe III

2) Menentukan Solusi Keduanya

Karena $b(x) = \sum_{i=0}^{\infty} b_i x^i$, maka:

$$U'' + \left(\frac{2y_1'}{y_1} + \frac{b_0}{x} + b_1 + \sum_{i=2}^{\infty} b_i x^{i-1} \right) U' = 0$$

Dari persamaan $y(x) = x^r (\sum_{m=0}^{\infty} a_m x^m)$

$$\frac{y_1'}{y_1} = \frac{x^{r-1} (\sum_{m=0}^{\infty} (m+r) a_m x^m)}{x^r (\sum_{m=0}^{\infty} a_m x^m)}$$

$$\frac{1}{x} \cdot \frac{\sum_{m=0}^{\infty} (m+r) a_m x^m}{(\sum_{m=0}^{\infty} a_m x^m)} = \frac{r}{x} + \text{sisal 1}$$

Penyelesaian Metode Frobenius tipe III

2) Menentukan Solusi Keduanya

Diperoleh persamaan:

$$U'' + \left(\frac{2r + b_0}{x} + \frac{\text{sisasisa}}{\dots} \right) U' = 0$$

Ingat persamaan $r^2 + (b_0 - 1)r + c_0 = 0$. Dari persamaan tersebut kita peroleh bahwa $r_1 + r_2 = -\frac{(b_0-1)}{1}$. Karena $r_1 = r_2$ Sehingga, diperoleh persamaan bahwa $b_0 - 1 = -2r$.

$$b_0 - 1 = -(r_1 + r_2) = -(r + r - p) = -2r + p$$

Maka, diperoleh: $2r + b_0 = p + 1$

Penyelesaian Metode Frobenius tipe III

2) Menentukan Solusi Keduanya

$$U'' + \left(\frac{2r + b_0}{x} + \frac{\text{sisal}}{\dots} \right) U' = 0$$

$$U'' = - \left(\frac{P + 1}{x} + \frac{\text{sisal}}{\dots} \right) U'$$

$$\ln U' = -(p + 1) \ln x + \dots \rightarrow$$

$$\ln U' = \ln x^{-(p+1)}$$

$$U' = x^{-(p+1)} e^{\dots}$$

$$U' = \frac{1}{x^{p+1}} + \frac{K_1}{x^p} + \dots + \frac{K_{p-1}}{x^2} + \frac{K_p}{x} + K_{p+1} + K_{p+2}x + \dots$$

$$U = K_p \ln x + \left(-\frac{1}{px^p} - \frac{K_1}{(p+1)x^{p-1}} - \dots - \frac{K_{p-1}}{x} + K_{p+1}x + \frac{K_{p+2}}{2}x^2 + \dots \right)$$

Penyelesaian Metode Frobenius tipe III

2) Menentukan Solusi Keduanya

Oleh karena $y_2(x) = U(x)y_1(x)$, maka diperoleh persamaan berikut

$$y_2(x) = K_p y_1 \ln x + x^{r_1-p} \left(-\frac{1}{p} - \frac{K_1}{p+1} - \dots - K_{p-1}x^{p-1} + K_{p+1}x^{p+1} + \dots \right) (a_0 + a_1x + \dots)$$

Jika dimisalkan $K_p = K$ dan $r_2 = r_1 - p$ maka solusi kedua dari PD tersebut adalah:

$$y_2(x) = K y_1 \ln x + x^{r_2} (A_0 + A_1x + A_2x^2 + \dots)$$

Penyelesaian Metode Frobenius tipe III

Jika $y_1(x) = x^{r_1}(\sum_{m=0}^{\infty} a_m x^m)$ dengan $a_0 \neq 0$ adalah penyelesaian dari PD, maka $y_2(x)$ diperoleh dari:

$$y_2(x) = K y_1 \ln x + x^{r_2}(\sum_{m=0}^{\infty} A_m x^m), \text{ dengan } a_0 \neq 0, K \text{ konstanta}$$

TERIMA KASIH